Medidas autosimilares: acotaciones asintóticas de la dimensión y decaimiento de la transformada de Fourier de imágenes suaves.

Carolina A. Mosquera[1] - Pablo S. Shmerkin[2]

[1] IMAS-CONICET, FCEyN, UBA, [2] CONICET, Universidad Torcuato Di Tella

Seminario del IMAL “Carlos Segovia Fernández”
15 de septiembre de 2017

- Medidas autosimilares. Antecedentes.

- Medidas autosimilares. Antecedentes.

- Decaimiento de la transformada de Fourier.

- Medidas autosimilares. Antecedentes.
- Decaimiento de la transformada de Fourier.
- Dimensión L^2 de convoluciones.

- Medidas autosimilares. Antecedentes.
- Decaimiento de la transformada de Fourier.
- Dimensión L^2 de convoluciones.
- Dimensión de convoluciones de Bernoulli.

Dada una medida de Borel finita en $\mathbb{R}^d$, su *transformada de Fourier* se define como

Dada una medida de Borel finita en $\mathbb{R}^d$, su *transformada de Fourier* se define como

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, d\mu(x).$$

Dada una medida de Borel finita en $\mathbb{R}^d$, su *transformada de Fourier* se define como

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, d\mu(x).$$

Decimos que $\widehat{\mu}(\xi)$ tiene *decaimiento polinomial* si existen $C_\sigma, \sigma > 0$ tales que

Dada una medida de Borel finita en $\mathbb{R}^d$, su *transformada de Fourier* se define como

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, d\mu(x).$$

Decimos que $\widehat{\mu}(\xi)$ tiene *decaimiento polinomial* si existen $C_\sigma, \sigma > 0$ tales que

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\sigma |\xi|^{-\sigma/2}.$$

Dada una medida de Borel finita en $\mathbb{R}^d$, su *transformada de Fourier* se define como

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, d\mu(x).$$

Decimos que $\widehat{\mu}(\xi)$ tiene *decaimiento polinomial* si existen $C_\sigma, \sigma > 0$ tales que

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\sigma |\xi|^{-\sigma/2}.$$

La *dimensión de Fourier* de μ se define como

Dada una medida de Borel finita en $\mathbb{R}^d$, su *transformada de Fourier* se define como

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{2\pi i \langle x,\xi \rangle}\, d\mu(x).$$

Decimos que $\widehat{\mu}(\xi)$ tiene *decaimiento polinomial* si existen $C_\sigma, \sigma > 0$ tales que

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\sigma |\xi|^{-\sigma/2}.$$

La *dimensión de Fourier* de μ se define como

$$\dim_F(\mu) = 2 \sup\{\sigma \geq 0 : |\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\sigma |\xi|^{-\sigma} \textit{ para alguna } C_\sigma > 0 \}.$$

Dada una medida de Borel finita en $\mathbb{R}^d$, su *transformada de Fourier* se define como

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, d\mu(x).$$

Decimos que $\widehat{\mu}(\xi)$ tiene *decaimiento polinomial* si existen $C_\sigma, \sigma > 0$ tales que

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\sigma |\xi|^{-\sigma/2}.$$

La *dimensión de Fourier* de μ se define como

$$\dim_F(\mu) = 2 \sup\{\sigma \geq 0 : |\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\sigma |\xi|^{-\sigma} \textit{ para alguna } C_\sigma > 0 \}.$$

Se dice que μ satisface la *condición de Frostman* si existe $s = s(\mu) > 0$ tal que

Dada una medida de Borel finita en $\mathbb{R}^d$, su *transformada de Fourier* se define como

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, d\mu(x).$$

Decimos que $\widehat{\mu}(\xi)$ tiene *decaimiento polinomial* si existen $C_\sigma, \sigma > 0$ tales que

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\sigma |\xi|^{-\sigma/2}.$$

La *dimensión de Fourier* de μ se define como

$$\dim_F(\mu) = 2 \sup\{\sigma \geq 0 : |\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_\sigma |\xi|^{-\sigma} \textit{ para alguna } C_\sigma > 0 \}.$$

Se dice que μ satisface la *condición de Frostman* si existe $s = s(\mu) > 0$ tal que

$$\mu(B(x, r)) \leq C r^{s(\mu)}.$$

Dados un conjunto de aplicaciones contractivas de $\mathbb{R}^d$ $S_1, \ldots, S_m$ y pesos $p_1, \ldots, p_m$ tales que $p_1 + \cdots + p_m = 1$, existe una única medida de Borel de probabilidad μ en $\mathbb{R}^d$ tal que

Dados un conjunto de aplicaciones contractivas de $\mathbb{R}^d$ $S_1, \ldots, S_m$ y pesos $p_1, \ldots, p_m$ tales que $p_1 + \cdots + p_m = 1$, existe una única medida de Borel de probabilidad μ en $\mathbb{R}^d$ tal que

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{m} p_i \mu(S_i^{-1} A), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ boreliano }.$$

Dados un conjunto de aplicaciones contractivas de $\mathbb{R}^d$ $S_1, \ldots, S_m$ y pesos $p_1, \ldots, p_m$ tales que $p_1 + \cdots + p_m = 1$, existe una única medida de Borel de probabilidad μ en $\mathbb{R}^d$ tal que

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{m} p_i \mu(S_i^{-1} A), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ boreliano }.$$

$(S_1, \ldots, S_m), (p_1, \ldots, p_m)$ se llama sistema iterado de funciones con pesos (IFSw) y μ se llama atractor del IFSw o medida autosimilar asociada al IFSw.

Sea $\mu_{a,t}^{p}$ la medida autosimilar para el IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$ con pesos $p = (p_1, \ldots, p_m)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $a \in (0, 1)$.

Sea $\mu_{a,t}^{p}$ la medida autosimilar para el IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$ con pesos $p = (p_1, \ldots, p_m)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $a \in (0, 1)$.

$\mu_{a,t}^{p}$ es la distribución de la suma aleatoria

Sea $\mu_{a,t}^{p}$ la medida autosimilar para el IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$ con pesos $p = (p_1, \ldots, p_m)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $a \in (0, 1)$.

$\mu_{a,t}^{p}$ es la distribución de la suma aleatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n a^n,$$

Sea $\mu^p_{a,t}$ la medida autosimilar para el IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^m$ con pesos $p = (p_1, \ldots, p_m)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $a \in (0, 1)$.

$\mu^p_{a,t}$ es la distribución de la suma aleatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n a^n,$$

donde X_n son v.a.i.i.d con $P(X_n = t_i) = p_i$.

Sea $\mu_{a,t}^{p}$ la medida autosimilar para el IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$ con pesos $p = (p_1, \ldots, p_m)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $a \in (0,1)$.

$\mu_{a,t}^{p}$ es la distribución de la suma aleatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n a^n,$$

donde X_n son v.a.i.i.d con $P(X_n = t_i) = p_i$.

Las llamamos medidas autosimilares homogéneas.

Sea $\mu_{a,t}^{p}$ la medida autosimilar para el IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$ con pesos $p = (p_1, \ldots, p_m)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $a \in (0, 1)$.

$\mu_{a,t}^{p}$ es la distribución de la suma aleatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n a^n,$$

donde X_n son v.a.i.i.d con $P(X_n = t_i) = p_i$.

Las llamamos medidas autosimilares homogéneas.

- El caso más simple es cuando $d = 1, m = 2,\ t_1 = -1,\ t_2 = 1$ y $p_1 = p, p_2 = 1 - p$ es decir, $\mu_{a,t}^{p}$ es la distribución de la suma

Sea $\mu_{a,t}^{p}$ la medida autosimilar para el IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$ con pesos $p = (p_1, \ldots, p_m)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $a \in (0, 1)$.

$\mu_{a,t}^{p}$ es la distribución de la suma aleatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n a^n,$$

donde X_n son v.a.i.i.d con $P(X_n = t_i) = p_i$.

Las llamamos medidas autosimilares homogéneas.

- El caso más simple es cuando $d = 1, m = 2,\ t_1 = -1,\ t_2 = 1$ y $p_1 = p, p_2 = 1 - p$ es decir, $\mu_{a,t}^{p}$ es la distribución de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm a^n$$

Sea $\mu_{a,t}^{p}$ la medida autosimilar para el IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$ con pesos $p = (p_1, \ldots, p_m)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $a \in (0, 1)$.

$\mu_{a,t}^{p}$ es la distribución de la suma aleatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n a^n,$$

donde X_n son v.a.i.i.d con $P(X_n = t_i) = p_i$.

Las llamamos medidas autosimilares homogéneas.

• El caso más simple es cuando $d = 1, m = 2,\ t_1 = -1,\ t_2 = 1$ y $p_1 = p, p_2 = 1 - p$ es decir, $\mu_{a,t}^{p}$ es la distribución de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm a^n$$

donde $P(+) = p$ y $P(-) = 1 - p$.

- Si $p = 1/2$ se llaman convoluciones de Bernoulli, μ_a.

- Si $p = 1/2$ se llaman convoluciones de Bernoulli, μ_a.

El caso $a = 1/3$ da la medida de Cantor-Lebesgue.

• Si $p = 1/2$ se llaman convoluciones de Bernoulli, μ_a.

El caso $a = 1/3$ da la medida de Cantor-Lebesgue.

• Si $p \neq 1/2$, se llaman convoluciones de Bernoulli sesgadas, μ_a^p.

Si μ es una medida soportada en el Cantor 1/3 entonces $\widehat{\mu}(\xi) \nrightarrow 0$ cuando $\xi \to +\infty$. Entonces

Si μ es una medida soportada en el Cantor 1/3 entonces $\widehat{\mu}(\xi) \nrightarrow 0$ cuando $\xi \to +\infty$. Entonces $\dim_{\mathsf{F}}(\mu) = 0$.

Si μ es una medida soportada en el Cantor 1/3 entonces $\widehat{\mu}(\xi) \nrightarrow 0$ cuando $\xi \to +\infty$. Entonces $\dim_F(\mu) = 0$.

- En 1984, Kaufman [Kau84] probó que si $F \in C^2$ en $\mathbb{R}$ con $F'' > 0$, entonces

Si μ es una medida soportada en el Cantor 1/3 entonces $\widehat{\mu}(\xi) \nrightarrow 0$ cuando $\xi \to +\infty$. Entonces $\dim_{\mathsf{F}}(\mu) = 0$.

- En 1984, Kaufman [Kau84] probó que si $F \in C^2$ en $\mathbb{R}$ con $F'' > 0$, entonces $\dim_{\mathsf{F}}(F_\mu) > 0$ donde

Si μ es una medida soportada en el Cantor 1/3 entonces $\widehat{\mu}(\xi) \nrightarrow 0$ cuando $\xi \to +\infty$. Entonces $\dim_{\mathsf{F}}(\mu) = 0$.

- En 1984, Kaufman [Kau84] probó que si $F \in C^2$ en $\mathbb{R}$ con $F'' > 0$, entonces $\dim_{\mathsf{F}}(F_\mu) > 0$ donde

$$F\mu(A) = \mu(F^{-1}A) \quad \text{para todo conjunto de Borel } A \subseteq \mathbb{R}.$$

Si μ es una medida soportada en el Cantor 1/3 entonces $\widehat{\mu}(\xi) \nrightarrow 0$ cuando $\xi \to +\infty$. Entonces $\dim_F(\mu) = 0$.

• En 1984, Kaufman [Kau84] probó que si $F \in C^2$ en $\mathbb{R}$ con $F'' > 0$, entonces $\dim_F(F_\mu) > 0$ donde

$$F\mu(A) = \mu(F^{-1}A) \quad \text{para todo conjunto de Borel } A \subseteq \mathbb{R}.$$

Kaufman prueba esto para convoluciones de Bernoulli μ_a con $a \in (0, 1/2)$.

Si μ es una medida soportada en el Cantor 1/3 entonces $\widehat{\mu}(\xi) \nrightarrow 0$ cuando $\xi \to +\infty$. Entonces $\dim_F(\mu) = 0$.

• En 1984, Kaufman [Kau84] probó que si $F \in C^2$ en $\mathbb{R}$ con $F'' > 0$, entonces $\dim_F(F_\mu) > 0$ donde

$$F\mu(A) = \mu(F^{-1}A) \quad \text{para todo conjunto de Borel } A \subseteq \mathbb{R}.$$

Kaufman prueba esto para convoluciones de Bernoulli μ_a con $a \in (0, 1/2)$.

• Aún si $\dim_F(\mu) = 0$, puede pasar que $\widehat{\mu}(\xi)$ tenga decaimiento rápido fuera de un conjunto de frecuencias pequeño.

Si μ es una medida soportada en el Cantor $1/3$ entonces $\widehat{\mu}(\xi) \nrightarrow 0$ cuando $\xi \to +\infty$. Entonces $\dim_F(\mu) = 0$.

• En 1984, Kaufman [Kau84] probó que si $F \in C^2$ en $\mathbb{R}$ con $F'' > 0$, entonces $\dim_F(F_\mu) > 0$ donde

$$F\mu(A) = \mu(F^{-1}A) \quad \text{para todo conjunto de Borel } A \subseteq \mathbb{R}.$$

Kaufman prueba esto para convoluciones de Bernoulli μ_a con $a \in (0, 1/2)$.

• Aún si $\dim_F(\mu) = 0$, puede pasar que $\widehat{\mu}(\xi)$ tenga decaimiento rápido fuera de un conjunto de frecuencias pequeño.

•Erdős [Erd39,Erd40] probó, para convoluciones de Bernoulli, que $\dim_F(\mu_a) > 0$ para casi todo a pero que existe un conjunto infinito numerable de $a's$ para los cuales $\widehat{\mu_a}(\xi)$ no tiende a cero cuando $|\xi| \to +\infty$.

• Kahane [Kah71] prueba que $\dim_{\mathsf{F}}(\mu_a) > 0$ para todo a fuera de un conjunto de excepciones de dimensión de Hausdorff cero.

- Kahane [Kah71] prueba que $\dim_F(\mu_a) > 0$ para todo a fuera de un conjunto de excepciones de dimensión de Hausdorff cero.
- Kaufman (argumento de Erdős-Kahane)

• Kahane [Kah71] prueba que $\dim_F(\mu_a) > 0$ para todo a fuera de un conjunto de excepciones de dimensión de Hausdorff cero.

• Kaufman (argumento de Erdős-Kahane)

• Tsujii [Tsu15] probó un resultado similar para medidas autosimilares en $\mathbb{R}$.

• Kahane [Kah71] prueba que $\dim_F(\mu_a) > 0$ para todo a fuera de un conjunto de excepciones de dimensión de Hausdorff cero.

• Kaufman (argumento de Erdős-Kahane)

• Tsujii [Tsu15] probó un resultado similar para medidas autosimilares en $\mathbb{R}$.

Teorema (Kaufman, Tsujii)

Sea μ una medida autosimilar en $\mathbb{R}$ no atómica. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo T suficientemente grande, el conjunto

$$\{\xi \in [-T, T] : |\widehat{\mu}(\xi)| \geq T^{-\delta}\}$$

puede cubrirse con T^{ε} intervalos de longitud 1.

- Medidas autosimilares. Antecedentes. $\checkmark$

- Medidas autosimilares. Antecedentes. ✓

- Decaimiento de la transformada de Fourier.

Consideramos $\mu_{a,t}^{p}$: medida autosimilar asociada al IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$, con $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$.

Consideramos $\mu^{p}_{a,t}$: medida autosimilar asociada al IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$, con $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$.

La convolución de dos medidas de Borel de probabilidad μ y ν en $\mathbb{R}$ viene dada por la fórmula

Consideramos $\mu_{a,t}^{p}$: medida autosimilar asociada al IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$, con $p = (p_1, \dots, p_m)$, $t = (t_1, \dots, t_m)$.

La convolución de dos medidas de Borel de probabilidad μ y ν en $\mathbb{R}$ viene dada por la fórmula

$$\mu * \nu(A) = (\mu \times \nu)\{(x, y) : x + y \in A\} = \int \mu(x - A)\, d\nu(x).$$

Consideramos $\mu^p_{a,t}$: medida autosimilar asociada al IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^m$, con $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$.

La convolución de dos medidas de Borel de probabilidad μ y ν en $\mathbb{R}$ viene dada por la fórmula

$$\mu * \nu(A) = (\mu \times \nu)\{(x, y) : x + y \in A\} = \int \mu(x - A)\, d\nu(x).$$

$\mu^p_{a,t}$ es la convolución infinita de medidas discretas $\sum_{i=1}^m p_i\, \delta_{t_i a^n}$, entonces su transformada de Fourier es

Consideramos $\mu_{a,t}^{p}$: medida autosimilar asociada al IFSw $\{ax + t_i\}_{i=1}^{m}$, con $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$.

La convolución de dos medidas de Borel de probabilidad μ y ν en $\mathbb{R}$ viene dada por la fórmula

$$\mu * \nu(A) = (\mu \times \nu)\{(x, y) : x + y \in A\} = \int \mu(x - A)\, d\nu(x).$$

$\mu_{a,t}^{p}$ es la convolución infinita de medidas discretas $\sum_{i=1}^{m} p_i\, \delta_{t_i a^n}$, entonces su transformada de Fourier es

$$\widehat{\mu}_{a,t}^{p}(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \Phi(a^n u),$$

donde $\Phi(u) = \Phi_{p,t}(u) = \sum_{j=1}^{m} p_j \exp(2\pi i t_j u)$.

Lema

Lo siguiente vale para todo $y \in \mathbb{R}$ *y todo* $c \in (0,1)$*: si* $d(y,\mathbb{Z}) > \frac{c}{2}$, *entonces* $|\Phi(y)| < 1 - \eta(c,p)$, *donde*

$$\eta(c,p) = p_1 + p_2 - \sqrt{p_1^2 + 2p_1p_2\cos(\pi c) + p_2^2}.$$

Lema

Lo siguiente vale para todo $y \in \mathbb{R}$ *y todo* $c \in (0,1)$*: si* $d(y,\mathbb{Z}) > \frac{c}{2}$, *entonces* $|\Phi(y)| < 1 - \eta(c,p)$*, donde*

$$\eta(c,p) = p_1 + p_2 - \sqrt{p_1^2 + 2p_1p_2\cos(\pi c) + p_2^2}.$$

Lema

Lo siguiente vale para todo $y \in \mathbb{R}$ *y todo* $c \in (0,1)$*: si* $d(y,\mathbb{Z}) > \frac{c}{2}$*, entonces* $|\Phi(y)| < 1 - \eta(c,p)$*, donde*

$$\eta(c,p) = p_1 + p_2 - \sqrt{p_1^2 + 2p_1p_2\cos(\pi c) + p_2^2}.$$

Dem. Tenemos que

Lema

Lo siguiente vale para todo $y \in \mathbb{R}$ y todo $c \in (0,1)$: si $d(y,\mathbb{Z}) > \frac{c}{2}$, entonces $|\Phi(y)| < 1 - \eta(c,p)$, donde

$$\eta(c,p) = p_1 + p_2 - \sqrt{p_1^2 + 2p_1p_2\cos(\pi c) + p_2^2}.$$

Dem. Tenemos que

$$\begin{aligned}
|\Phi(y)| &= |p_1 + p_2 e^{2\pi i y} + \sum_{j=3}^{m} p_j e^{2\pi i t_j y}| \\
&\leq |p_1 + p_2\cos(2\pi y) + i\, p_2 \sin(2\pi y)| + \sum_{j=3}^{m} p_j \\
&= 1 - p_1 - p_2 + \sqrt{p_1^2 + 2p_1p_2\cos(2\pi y) + p_2^2}.
\end{aligned}$$

Usando que $d(y, \mathbb{Z}) > \frac{c}{2}$, Usando que $d(y, \mathbb{Z}) > \frac{c}{2}$, $\cos(2\pi y) < \cos(\pi c)$. ■

Usando que $d(y, \mathbb{Z}) > \frac{c}{2}$, $\cos(2\pi y) < \cos(\pi c)$.$\blacksquare$

• Para convoluciones de Bernoulli: $\Phi(u) = \cos(2\pi u)$ y $\eta(c, p) = 1 - \cos(\pi c)$.

Proposición (A)

Dados $a \in (0,1)$ y un vector de probabilidad $p = (p_1, \ldots, p_m)$ existe $C = C_a > 0$ tal que se tiene lo siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente chico vale lo siguiente para todo T suficientemente grande: el conjunto de frecuencias $u \in [-T, T]$ tales que $|\widehat{\mu}^p_{a,t}(u)| \geq T^{-\varepsilon}$ puede cubrirse con $C_a T^\delta$ intervalos de longitud 1, donde $C_a > 0$ depende solo de a,

$$\delta = \frac{\log\left(\lceil 1 + 1/a \rceil\right)\tilde{\varepsilon} + h(\tilde{\varepsilon})}{\log(1/a)} \quad (A1),$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\log(a)}{\log(1 - \eta(\frac{a}{a+1}, p))}\,\varepsilon,$$

y $h(\tilde{\varepsilon}) = -\tilde{\varepsilon}\log(\tilde{\varepsilon}) - (1-\tilde{\varepsilon})\log(1-\tilde{\varepsilon})$.

Idea de Dem.

Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1-N} \leq T < a^{-N}$ podemos suponer que $T = a^{-N}$.

Idea de Dem.

Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1-N} \leq T < a^{-N}$ podemos suponer que $T = a^{-N}$.
Sea u con $0 \leq u \leq a^{-N}$.

Idea de Dem.

Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1-N} \leq T < a^{-N}$ podemos suponer que $T = a^{-N}$.

Sea u con $0 \leq u \leq a^{-N}$. Entonces $u = ta^{-N}$ con $t \in [0, 1]$.

Idea de Dem.

Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1-N} \leq T < a^{-N}$ podemos suponer que $T = a^{-N}$.
Sea u con $0 \leq u \leq a^{-N}$. Entonces $u = ta^{-N}$ con $t \in [0,1]$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\mu}^{p}_{a,t}(u)| &\leq |\prod_{j=1}^{\infty} \Phi(a^{j} u)| \\
&= |\prod_{j=1}^{\infty} \Phi(a^{j} a^{-N} t)| \\
&\leq \prod_{j=1}^{N} |\Phi(a^{j-N} t)| \\
&= \prod_{j=0}^{N-1} |\Phi(a^{-j} t)|.
\end{aligned}
$$

$\|y\|$ es la distancia de $y \in \mathbb{R}$ al entero más cercano.

$\|y\|$ es la distancia de $y \in \mathbb{R}$ al entero más cercano. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\widetilde{\varepsilon}$ como en el enunciado. Sea

$$S(N, \tilde{\varepsilon}) = \left\{ t \in [0,1] : \|a^{-j} t\| < \xi \text{ para al menos } (1 - \tilde{\varepsilon}) N \text{ enteros } j \in [N] \right\}$$

$\|y\|$ es la distancia de $y \in \mathbb{R}$ al entero más cercano. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\widetilde{\varepsilon}$ como en el enunciado. Sea

$$S(N, \tilde{\varepsilon}) = \left\{ t \in [0,1] : \|a^{-j} t\| < \xi \text{ para al menos } (1 - \tilde{\varepsilon})N \text{ enteros } j \in [N] \right\}$$

con $[N] = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, y $\xi = \xi(a) = \frac{a}{2(a+1)}$.

$\|y\|$ es la distancia de $y \in \mathbb{R}$ al entero más cercano. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\widetilde{\varepsilon}$ como en el enunciado. Sea

$$S(N, \tilde{\varepsilon}) = \left\{ t \in [0,1] : \|a^{-j} t\| < \xi \text{ para al menos } (1 - \tilde{\varepsilon}) N \text{ enteros } j \in [N] \right\}$$

con $[N] = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, y $\xi = \xi(a) = \frac{a}{2(a+1)}$.
Si $t \notin S(N, \tilde{\varepsilon})$ entonces, por el Lema,

$$|\widehat{\mu}^{p}_{a,t}(u)| \leq (1 - \eta(2\xi, p))^{\tilde{\varepsilon} N} = a^{N\varepsilon} = T^{-\varepsilon},$$

usando la definición de $\widetilde{\varepsilon}$.

$\|y\|$ es la distancia de $y \in \mathbb{R}$ al entero más cercano. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\tilde{\varepsilon}$ como en el enunciado. Sea

$$S(N, \tilde{\varepsilon}) = \left\{ t \in [0,1] : \|a^{-j} t\| < \xi \text{ para al menos } (1-\tilde{\varepsilon}) N \text{ enteros } j \in [N] \right\}$$

con $[N] = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, y $\xi = \xi(a) = \frac{a}{2(a+1)}$.
Si $t \notin S(N, \tilde{\varepsilon})$ entonces, por el Lema,

$$|\widehat{\mu}^{p}_{a,t}(u)| \leq (1 - \eta(2\xi, p))^{\tilde{\varepsilon} N} = a^{N\varepsilon} = T^{-\varepsilon},$$

usando la definición de $\tilde{\varepsilon}$.
Deducimos que $\{t \in [0,1] : |\widehat{\mu}^{p}_{a,t}(ta^{-N})| \geq T^{-\varepsilon}\} \subseteq S(N, \tilde{\varepsilon})$.

$\|y\|$ es la distancia de $y \in \mathbb{R}$ al entero más cercano. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\tilde{\varepsilon}$ como en el enunciado. Sea

$$S(N, \tilde{\varepsilon}) = \left\{ t \in [0,1] : \|a^{-j} t\| < \xi \text{ para al menos } (1 - \tilde{\varepsilon}) N \text{ enteros } j \in [N] \right\}$$

con $[N] = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, y $\xi = \xi(a) = \frac{a}{2(a+1)}$.
Si $t \notin S(N, \tilde{\varepsilon})$ entonces, por el Lema,

$$|\widehat{\mu}^{p}_{a,t}(u)| \leq (1 - \eta(2\xi, p))^{\tilde{\varepsilon} N} = a^{N\varepsilon} = T^{-\varepsilon},$$

usando la definición de $\tilde{\varepsilon}$.
Deducimos que $\{t \in [0,1] : |\widehat{\mu}^{p}_{a,t}(ta^{-N})| \geq T^{-\varepsilon}\} \subseteq S(N, \tilde{\varepsilon})$.

Para probar que $\{u \in [0,T] : |\widehat{\mu}^{p}_{a,t}(u)| \geq T^{-\varepsilon}\}$ puede cubrirse con una cantidad pequeña de intervalos de longitud 1, estimamos la cantidad y longitud de intervalos necesarios para cubrir $S(N, \tilde{\varepsilon})$. $\blacksquare$.

Teorema

Sea $F \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $F'' > 0$ y sea $\mu = \mu^p_{a,t}$ una medida autosimilar homogénea en $\mathbb{R}$ no atómica. Entonces existe $\sigma = \sigma(\mu) > 0$ (independiente de F) y $C = C(F, \mu) > 0$ tales que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \le C|u|^{-\sigma}.$$

Teorema

Sea $F \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $F'' > 0$ y sea $\mu = \mu^p_{a,t}$ una medida autosimilar homogénea en $\mathbb{R}$ no atómica. Entonces existe $\sigma = \sigma(\mu) > 0$ (independiente de F) y $C = C(F, \mu) > 0$ tales que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \le C|u|^{-\sigma}.$$

Teorema

Sea $F \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $F'' > 0$ y sea $\mu = \mu^p_{a,t}$ una medida autosimilar homogénea en $\mathbb{R}$ no atómica. Entonces existe $\sigma = \sigma(\mu) > 0$ (independiente de F) y $C = C(F, \mu) > 0$ tales que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C|u|^{-\sigma}.$$

- De la prueba, se obtiene que $\sigma = \min\left\{\frac{(s-\delta)}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$, donde $s = s(\mu)$ es el exponente de Frostman de μ.

Teorema

Sea $F \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $F'' > 0$ y sea $\mu = \mu_{a,t}^p$ una medida autosimilar homogénea en $\mathbb{R}$ no atómica. Entonces existe $\sigma = \sigma(\mu) > 0$ (independiente de F) y $C = C(F, \mu) > 0$ tales que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C|u|^{-\sigma}.$$

- De la prueba, se obtiene que $\sigma = \min\left\{\frac{(s-\delta)}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$, donde $s = s(\mu)$ es el exponente de Frostman de μ.

Si el IFS satisface la OSC,

Teorema

Sea $F \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $F'' > 0$ y sea $\mu = \mu^p_{a,t}$ una medida autosimilar homogénea en $\mathbb{R}$ no atómica. Entonces existe $\sigma = \sigma(\mu) > 0$ (independiente de F) y $C = C(F,\mu) > 0$ tales que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C|u|^{-\sigma}.$$

- De la prueba, se obtiene que $\sigma = \text{mín}\left\{\frac{(s-\delta)}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$, donde $s = s(\mu)$ es el exponente de Frostman de μ.

Si el IFS satisface la OSC, $s = \text{mín}_{i=1}^{m} \frac{\log p_i}{\log a}$.

Teorema

Sea $F \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $F'' > 0$ y sea $\mu = \mu^p_{a,t}$ una medida autosimilar homogénea en $\mathbb{R}$ no atómica. Entonces existe $\sigma = \sigma(\mu) > 0$ (independiente de F) y $C = C(F, \mu) > 0$ tales que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C|u|^{-\sigma}.$$

- De la prueba, se obtiene que $\sigma = \text{mín}\left\{\frac{(s-\delta)}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$, donde $s = s(\mu)$ es el exponente de Frostman de μ.

Si el IFS satisface la OSC, $s = \text{mín}_{i=1}^{m} \frac{\log p_i}{\log a}$.

Si $p_i = 1/m$ para todo i, entonces $s = \log m / \log(1/a)$.

Corolario

Sea μ la medida de Cantor-Lebesgue. Entonces para toda función de clase C^2 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F'' > 0$, existe una constante $C_F > 0$ tal que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C_F |u|^{-\sigma}$$

Más aún, puede tomarse $\sigma = 0{,}032$.

Corolario

Sea μ la medida de Cantor-Lebesgue. Entonces para toda función de clase C^2 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F'' > 0$, existe una constante $C_F > 0$ tal que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C_F |u|^{-\sigma}$$

Más aún, puede tomarse $\sigma = 0{,}032$.

Corolario

Sea μ la medida de Cantor-Lebesgue. Entonces para toda función de clase C^2 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F'' > 0$, existe una constante $C_F > 0$ tal que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C_F |u|^{-\sigma}$$

Más aún, puede tomarse $\sigma = 0{,}032$.

Dem. Se tiene que $\sigma = \text{mín}\left\{\frac{(s-\delta)}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$

Corolario

Sea μ la medida de Cantor-Lebesgue. Entonces para toda función de clase C^2 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F'' > 0$, existe una constante $C_F > 0$ tal que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C_F |u|^{-\sigma}$$

Más aún, puede tomarse $\sigma = 0{,}032$.

Dem. Se tiene que $\sigma = \text{mín}\left\{\frac{(s-\delta)}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ Buscamos ε tal que $s(\mu) - \delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Corolario

Sea μ la medida de Cantor-Lebesgue. Entonces para toda función de clase C^2 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F'' > 0$, existe una constante $C_F > 0$ tal que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C_F |u|^{-\sigma}$$

Más aún, puede tomarse $\sigma = 0{,}032$.

Dem. Se tiene que $\sigma = \text{mín}\left\{\frac{(s-\delta)}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ Buscamos ε tal que $s(\mu) - \delta(\varepsilon) = \varepsilon$.
En este caso $a = 1/3, p = (1/2, 1/2), \eta(c, p) = 1 - \cos(\pi c)$ y $s(\mu) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$. Entonces usando (A1),

Corolario

Sea μ la medida de Cantor-Lebesgue. Entonces para toda función de clase C^2 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $F''>0$, existe una constante $C_F>0$ tal que

$$|\widehat{F\mu}(u)| \leq C_F|u|^{-\sigma}$$

Más aún, puede tomarse $\sigma = 0{,}032$.

Dem. Se tiene que $\sigma = \text{mín}\left\{\frac{(s-\delta)}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ Buscamos ε tal que $s(\mu)-\delta(\varepsilon)=\varepsilon$.

En este caso $a=1/3, p=(1/2,1/2), \eta(c,p)=1-\cos(\pi c)$ y $s(\mu)=\frac{\log(2)}{\log(3)}$. Entonces usando (A1),

$$\delta(\tilde{\varepsilon}) = \frac{2\log(2)\tilde{\varepsilon}+h(\tilde{\varepsilon})}{\log(3)}, \quad \text{y } \tilde{\varepsilon} = \frac{2\log(3)\varepsilon}{\log(2)}.$$

Sea

$$G(\varepsilon) := s(\mu) - \delta(\varepsilon) - \varepsilon = \frac{\log(2)}{\log(3)} - 5\varepsilon + \frac{2}{\log 2}\varepsilon \log\left(\frac{2\log(3)\varepsilon}{\log(2)}\right) + \left(\frac{\log(2) - 2\log(3)\varepsilon}{\log(2)\log(3)}\right)\log\left(\frac{\log(2) - 2\log(3)\varepsilon}{\log(2)}\right).$$

Sea

$$G(\varepsilon) := s(\mu) - \delta(\varepsilon) - \varepsilon = \frac{\log(2)}{\log(3)} - 5\varepsilon + \frac{2}{\log 2}\varepsilon \log\left(\frac{2\log(3)\varepsilon}{\log(2)}\right) + \left(\frac{\log(2) - 2\log(3)\varepsilon}{\log(2)\log(3)}\right)\log\left(\frac{\log(2) - 2\log(3)\varepsilon}{\log(2)}\right).$$

$G(\varepsilon)$ tiene como dominio $(0, \frac{\log 2}{\log 9})$, y $G(\varepsilon) = 0$ si y sólo si $\varepsilon \simeq 0{,}048279$. Luego, $\sigma = 0{,}032$.

Sea

$$G(\varepsilon) := s(\mu) - \delta(\varepsilon) - \varepsilon = \frac{\log(2)}{\log(3)} - 5\varepsilon + \frac{2}{\log 2}\varepsilon \log\left(\frac{2\log(3)\varepsilon}{\log(2)}\right) + \left(\frac{\log(2) - 2\log(3)\varepsilon}{\log(2)\log(3)}\right)\log\left(\frac{\log(2) - 2\log(3)\varepsilon}{\log(2)}\right).$$

$G(\varepsilon)$ tiene como dominio $(0, \frac{\log 2}{\log 9})$, y $G(\varepsilon) = 0$ si y sólo si $\varepsilon \simeq 0{,}048279$. Luego, $\sigma = 0{,}032$. ■

- Medidas autosimilares. Antecedentes. ✓

- Medidas autosimilares. Antecedentes. $\checkmark$

- Decaimiento de la transformada de Fourier. $\checkmark$

- Medidas autosimilares. Antecedentes. $\checkmark$
- Decaimiento de la transformada de Fourier. $\checkmark$
- Dimensión L^2 de convoluciones.

Sea $q \in (1, +\infty)$, y sea $s_n(\mu, q) = \sum_{Q \in \mathcal{D}_n} \mu(Q)^q$, donde $(\mathcal{D}_n)$ es la partición de $\mathbb{R}^d$ en intervalos diádicos de longitud 2^{-n}.
Definimos

Sea $q \in (1, +\infty)$, y sea $s_n(\mu, q) = \sum_{Q \in \mathcal{D}_n} \mu(Q)^q$, donde $(\mathcal{D}_n)$ es la partición de $\mathbb{R}^d$ en intervalos diádicos de longitud 2^{-n}.
Definimos

$$\dim_q(\mu) := \liminf_{n \to +\infty} \frac{\log(s_n(\mu, q))}{(q-1)\log(2^{-n})}.$$

Sea $q \in (1, +\infty)$, y sea $s_n(\mu, q) = \sum_{Q \in \mathcal{D}_n} \mu(Q)^q$, donde $(\mathcal{D}_n)$ es la partición de $\mathbb{R}^d$ en intervalos diádicos de longitud 2^{-n}.
Definimos

$$\dim_q(\mu) := \liminf_{n \to +\infty} \frac{\log(s_n(\mu, q))}{(q-1)\log(2^{-n})}.$$

- La dimensión L^2 de una medida se conoce también como la dimensión de correlación.

Sea $q \in (1, +\infty)$, y sea $s_n(\mu, q) = \sum_{Q \in \mathcal{D}_n} \mu(Q)^q$, donde $(\mathcal{D}_n)$ es la partición de $\mathbb{R}^d$ en intervalos diádicos de longitud 2^{-n}.
Definimos

$$\dim_q(\mu) := \liminf_{n \to +\infty} \frac{\log(s_n(\mu, q))}{(q-1)\log(2^{-n})}.$$

• La dimensión L^2 de una medida se conoce también como la dimensión de correlación.

• La dimensión L^∞ coincide con el exponente de Frostman y puede definirse

Sea $q \in (1, +\infty)$, y sea $s_n(\mu, q) = \sum_{Q \in \mathcal{D}_n} \mu(Q)^q$, donde $(\mathcal{D}_n)$ es la partición de $\mathbb{R}^d$ en intervalos diádicos de longitud 2^{-n}.
Definimos

$$\dim_q(\mu) := \liminf_{n \to +\infty} \frac{\log(s_n(\mu, q))}{(q-1)\log(2^{-n})}.$$

• La dimensión L^2 de una medida se conoce también como la dimensión de correlación.

• La dimensión L^∞ coincide con el exponente de Frostman y puede definirse

$$\dim_\infty(\mu) := \liminf_{n \to +\infty} \frac{\log(\max\{\mu(Q) : Q \in \mathcal{D}_n\})}{\log(2^{-n})}.$$

- La función $q \mapsto \dim_q(\mu)$ es continua y no creciente en $(1, +\infty]$.

- La función $q \mapsto \dim_q(\mu)$ es continua y no creciente en $(1, +\infty]$.
- $\dim_q(\mu) \leq \dim_{\mathrm{H}}(\mu)$ para todo $q \in (1, +\infty]$, donde $\dim_{\mathrm{H}}$ es la dimensión de Hausdorff inferior de la medida μ

• La función $q \mapsto \dim_q(\mu)$ es continua y no creciente en $(1, +\infty]$.

• $\dim_q(\mu) \leq \dim_{\mathrm{H}}(\mu)$ para todo $q \in (1, +\infty]$, donde $\dim_{\mathrm{H}}$ es la dimensión de Hausdorff inferior de la medida μ

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mu) := \text{ínf}\{\dim_{\mathrm{H}}(A) : \mu(A) > 0\}.$$

• La función $q \mapsto \dim_q(\mu)$ es continua y no creciente en $(1, +\infty]$.

• $\dim_q(\mu) \leq \dim_{\mathrm{H}}(\mu)$ para todo $q \in (1, +\infty]$, donde $\dim_{\mathrm{H}}$ es la dimensión de Hausdorff inferior de la medida μ

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mu) := \text{ínf}\{\dim_{\mathrm{H}}(A) : \mu(A) > 0\}.$$

• $\dim_{\mathrm{F}}(\mu) \leq \dim_2(\mu)$.

- La función $q \mapsto \dim_q(\mu)$ es continua y no creciente en $(1, +\infty]$.
- $\dim_q(\mu) \leq \dim_{\mathrm{H}}(\mu)$ para todo $q \in (1, +\infty]$, donde $\dim_{\mathrm{H}}$ es la dimensión de Hausdorff inferior de la medida μ

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mu) := \text{ínf}\{\dim_{\mathrm{H}}(A) : \mu(A) > 0\}.$$

- $\dim_{\mathrm{F}}(\mu) \leq \dim_2(\mu)$.
- [FLR02]

Teorema (B)

Sea $\mu = \mu^t_{a,p}$ *como antes. Dado cualquier* $\kappa > 0$*, existe* $\sigma = \sigma(a, p, \kappa) > 0$ *tal que vale lo siguiente: sea* ν *una medida de probabilidad de Borel con* $\dim_2(\nu) \leq 1 - \kappa$*. Entonces*

$$\dim_2(\mu * \nu) > \dim_2(\nu) + \sigma.$$

Más precisamente, podemos tomar $\sigma = 2\varepsilon$*, donde* $\varepsilon = \varepsilon(a, p, \kappa)$ *es tal que el valor de* $\delta = \delta(\varepsilon, a, p)$ *dado en (A1) de la Proposición (A) satisface*

$$\kappa - 2\varepsilon = \delta. \quad (B1)$$

Teorema (B)

Sea $\mu = \mu_{a,p}^{t}$ *como antes. Dado cualquier* $\kappa > 0$*, existe* $\sigma = \sigma(a,p,\kappa) > 0$ *tal que vale lo siguiente: sea* ν *una medida de probabilidad de Borel con* $\dim_2(\nu) \leq 1 - \kappa$*. Entonces*

$$\dim_2(\mu * \nu) > \dim_2(\nu) + \sigma.$$

Más precisamente, podemos tomar $\sigma = 2\varepsilon$*, donde* $\varepsilon = \varepsilon(a,p,\kappa)$ *es tal que el valor de* $\delta = \delta(\varepsilon, a, p)$ *dado en (A1) de la Proposición (A) satisface*

$$\kappa - 2\varepsilon = \delta. \quad (B1)$$

Teorema (B)

Sea $\mu = \mu^t_{a,p}$ *como antes. Dado cualquier* $\kappa > 0$*, existe* $\sigma = \sigma(a, p, \kappa) > 0$ *tal que vale lo siguiente: sea* ν *una medida de probabilidad de Borel con* $\dim_2(\nu) \leq 1 - \kappa$*. Entonces*

$$\dim_2(\mu * \nu) > \dim_2(\nu) + \sigma.$$

Más precisamente, podemos tomar $\sigma = 2\varepsilon$*, donde* $\varepsilon = \varepsilon(a, p, \kappa)$ *es tal que el valor de* $\delta = \delta(\varepsilon, a, p)$ *dado en (A1) de la Proposición (A) satisface*

$$\kappa - 2\varepsilon = \delta. \quad (B1)$$

- [Shm16].

- Medidas autosimilares. Antecedentes. ✓

- Medidas autosimilares. Antecedentes. ✓

- Decaimiento de la transformada de Fourier. ✓

- Medidas autosimilares. Antecedentes. $\checkmark$

- Decaimiento de la transformada de Fourier. $\checkmark$

- Dimensión L^2 de convoluciones. $\checkmark$

- Medidas autosimilares. Antecedentes. ✓
- Decaimiento de la transformada de Fourier. ✓
- Dimensión L^2 de convoluciones. ✓
- Dimensión de convoluciones de Bernoulli.

Consideramos μ_a^p convoluciones de Bernoulli con radio de contracción a y peso p.

Consideramos μ_a^p convoluciones de Bernoulli con radio de contracción a y peso p.

Teorema (C)

Para todo $p_0 \in (0, 1/2)$ *existe* $C = C(p_0) > 0$ *tal que*

$$\inf_{p \in [p_0, 1-p_0]} \dim_\infty(\mu_a^p) \geq 1 - C(1-a)\log(1/(1-a)).$$

Consideramos μ_a^p convoluciones de Bernoulli con radio de contracción a y peso p.

Teorema (C)

Para todo $p_0 \in (0, 1/2)$ *existe* $C = C(p_0) > 0$ *tal que*

$$\inf_{p \in [p_0, 1-p_0]} \dim_\infty(\mu_a^p) \geq 1 - C(1-a)\log(1/(1-a)).$$

Consideramos μ_a^p convoluciones de Bernoulli con radio de contracción a y peso p.

Teorema (C)

Para todo $p_0 \in (0, 1/2)$ *existe* $C = C(p_0) > 0$ *tal que*

$$\inf_{p \in [p_0, 1-p_0]} \dim_\infty(\mu_a^p) \geq 1 - C(1-a)\log(1/(1-a)).$$

Lema

Sean μ, ν *dos medidas de probabilidad en* $\mathbb{R}$. *Entonces*

$$\dim_\infty(\mu * \nu) \geq \frac{\dim_2(\mu) + \dim_2(\nu)}{2}.$$

Dem.Teo.[C]:

Fijemos $a \in (0, 1)$ cerca de 1. Definimos

Dem.Teo.[C]:

Fijemos $a \in (0,1)$ cerca de 1. Definimos

$$N = N_a := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \colon a^n < 1/2\}.$$

Dem.Teo.[C]:

Fijemos $a \in (0, 1)$ cerca de 1. Definimos

$$N = N_a := \text{mín}\{n \in \mathbb{N}: a^n < 1/2\}.$$

Entonces

$$\frac{a}{2} \leq a^N < \frac{1}{2}.$$

Dem.Teo.[C]:

Fijemos $a \in (0,1)$ cerca de 1. Definimos

$$N = N_a := \min\{n \in \mathbb{N} : a^n < 1/2\}.$$

Entonces

$$\frac{a}{2} \leq a^N < \frac{1}{2}.$$

Suponiendo que $a > 1/2$, obtenemos $a^N \in (1/4, 1/2)$.

Dem.Teo.[C]:

Fijemos $a \in (0,1)$ cerca de 1. Definimos

$$N = N_a := \min\{n \in \mathbb{N} : a^n < 1/2\}.$$

Entonces

$$\frac{a}{2} \leq a^N < \frac{1}{2}.$$

Suponiendo que $a > 1/2$, obtenemos $a^N \in (1/4, 1/2)$.

Fijemos $\kappa \in (0,1)$, y supongamos que $\dim_2(\mu_a^p) \leq 1 - \kappa$.

Si $S_a(x) = ax$, podemos escribir

Si $S_a(x) = ax$, podemos escribir

$$\mu_a^p = \mu_{a^N}^p * S_a \mu_{a^N}^p * \cdots * S_{a^{N-1}} \mu_{a^N}^p. \quad (*)$$

Si $S_a(x) = ax$, podemos escribir

$$\mu_a^p = \mu_{a^N}^p * S_a \mu_{a^N}^p * \cdots * S_{a^{N-1}} \mu_{a^N}^p. \quad (*)$$

Sabemos que $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \geq 0$.

Si $S_a(x) = ax$, podemos escribir

$$\mu_a^p = \mu_{a^N}^p * S_a \mu_{a^N}^p * \cdots * S_{a^{N-1}} \mu_{a^N}^p. \quad (*)$$

Sabemos que $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \geq 0$. Entonces, como $\dim_2(\mu_a^p) \leq 1 - \kappa$ y vale $(*)$, obtenemos

Si $S_a(x) = ax$, podemos escribir

$$\mu_a^p = \mu_{a^N}^p * S_a \mu_{a^N}^p * \cdots * S_{a^{N-1}} \mu_{a^N}^p. \quad (*)$$

Sabemos que $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \geq 0$. Entonces, como $\dim_2(\mu_a^p) \leq 1 - \kappa$ y vale $(*)$, obtenemos $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \leq 1 - \kappa$.

Si $S_a(x) = ax$, podemos escribir

$$\mu_a^p = \mu_{a^N}^p * S_a\mu_{a^N}^p * \cdots * S_{a^{N-1}}\mu_{a^N}^p. \quad (*)$$

Sabemos que $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \geq 0$. Entonces, como $\dim_2(\mu_a^p) \leq 1 - \kappa$ y vale $(*)$, obtenemos $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \leq 1 - \kappa$.

Por Teorema [B], existe $\sigma = \sigma_{a,p}(\kappa) > 0$ tal que

Si $S_a(x) = ax$, podemos escribir

$$\mu_a^p = \mu_{a^N}^p * S_a\mu_{a^N}^p * \cdots * S_{a^{N-1}}\mu_{a^N}^p. \quad (*)$$

Sabemos que $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \geq 0$. Entonces, como $\dim_2(\mu_a^p) \leq 1 - \kappa$ y vale $(*)$, obtenemos $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \leq 1 - \kappa$.

Por Teorema [B], existe $\sigma = \sigma_{a,p}(\kappa) > 0$ tal que

$$\dim_2(\mu_{a^N}^p * S_a\mu_{a^N}^p) \geq \sigma.$$

Si $S_a(x) = ax$, podemos escribir

$$\mu_a^p = \mu_{a^N}^p * S_a \mu_{a^N}^p * \cdots * S_{a^{N-1}} \mu_{a^N}^p. \quad (*)$$

Sabemos que $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \geq 0$. Entonces, como $\dim_2(\mu_a^p) \leq 1 - \kappa$ y vale $(*)$, obtenemos $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \leq 1 - \kappa$.

Por Teorema [B], existe $\sigma = \sigma_{a,p}(\kappa) > 0$ tal que

$$\dim_2(\mu_{a^N}^p * S_a \mu_{a^N}^p) \geq \sigma.$$

Inductivamente usando $(*)$, luego de $N - 1$ pasos, tenemos que si $\dim_2(\mu_a^p) \leq 1 - \kappa$, entonces

$$\dim_2(\mu_a^p) \geq (N - 1)\sigma.$$

Si $S_a(x) = ax$, podemos escribir

$$\mu_a^p = \mu_{a^N}^p * S_a\mu_{a^N}^p * \cdots * S_{a^{N-1}}\mu_{a^N}^p. \quad (*)$$

Sabemos que $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \geq 0$. Entonces, como $\dim_2(\mu_a^p) \leq 1 - \kappa$ y vale $(*)$, obtenemos $\dim_2(\mu_{a^N}^p) \leq 1 - \kappa$.

Por Teorema [B], existe $\sigma = \sigma_{a,p}(\kappa) > 0$ tal que

$$\dim_2(\mu_{a^N}^p * S_a\mu_{a^N}^p) \geq \sigma.$$

Inductivamente usando $(*)$, luego de $N - 1$ pasos, tenemos que si $\dim_2(\mu_a^p) \leq 1 - \kappa$, entonces

$$\dim_2(\mu_a^p) \geq (N-1)\sigma.$$

Luego, si κ es tal que $\sigma = \sigma_{a,p}(\kappa) = 1/(N-1)$, entonces

$$\dim_2(\mu_a^p) \geq 1 - \kappa.$$

Estimación de κ : C_i son constantes que sólo dependen de p_0.

Estimación de κ : C_i son constantes que sólo dependen de p_0.
De (B1), $\kappa = \delta + \sigma$ con $\delta = \delta(\sigma/2)$ viene dado por (A1).

Estimación de κ : C_i son constantes que sólo dependen de p_0.
De (B1), $\kappa = \delta + \sigma$ con $\delta = \delta(\sigma/2)$ viene dado por (A1).
De (A1) se tiene que $\tilde{\varepsilon} = C(a^N, p)\sigma$, con $C > 0$ que depende continuamente de a^N y p.

Estimación de κ : C_i son constantes que sólo dependen de p_0.
De (B1), $\kappa = \delta + \sigma$ con $\delta = \delta(\sigma/2)$ viene dado por (A1).
De (A1) se tiene que $\tilde{\varepsilon} = C(a^N, p)\sigma$, con $C > 0$ que depende continuamente de a^N y p.
Usando que $a^N \in [1/4, 1/2]$ y $p \in [p_0, 1 - p_0]$, de (A1) se obtiene que, para σ chico, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\delta \leq C_1 \sigma \log(1/\sigma).$$

Estimación de κ : C_i son constantes que sólo dependen de p_0.
De (B1), $\kappa = \delta + \sigma$ con $\delta = \delta(\sigma/2)$ viene dado por (A1).
De (A1) se tiene que $\tilde{\varepsilon} = C(a^N, p)\sigma$, con $C > 0$ que depende continuamente de a^N y p.
Usando que $a^N \in [1/4, 1/2]$ y $p \in [p_0, 1 - p_0]$, de (A1) se obtiene que, para σ chico, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\delta \leq C_1 \sigma \log(1/\sigma).$$

Luego,

$$\dim_2(\mu_a^p) \geq 1 - \kappa \geq 1 - \sigma - C_1 \sigma \log(1/\sigma) \geq 1 - C_2 \sigma \log(1/\sigma) \quad (**)$$

Estimación de κ : C_i son constantes que sólo dependen de p_0.
De (B1), $\kappa = \delta + \sigma$ con $\delta = \delta(\sigma/2)$ viene dado por (A1).
De (A1) se tiene que $\tilde{\varepsilon} = C(a^N, p)\sigma$, con $C > 0$ que depende continuamente de a^N y p.
Usando que $a^N \in [1/4, 1/2]$ y $p \in [p_0, 1 - p_0]$, de (A1) se obtiene que, para σ chico, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\delta \leq C_1 \sigma \log(1/\sigma).$$

Luego,

$$\dim_2(\mu_a^p) \geq 1 - \kappa \geq 1 - \sigma - C_1 \sigma \log(1/\sigma) \geq 1 - C_2 \sigma \log(1/\sigma) \quad (**)$$

Como $a^{1/\sigma} = a^{N-1} < a^{-1}/2 < 2/3$, $\sigma \leq \log(1/a)/\log(3/2)$.

Estimación de κ : C_i son constantes que sólo dependen de p_0.
De (B1), $\kappa = \delta + \sigma$ con $\delta = \delta(\sigma/2)$ viene dado por (A1).
De (A1) se tiene que $\tilde{\varepsilon} = C(a^N, p)\sigma$, con $C > 0$ que depende continuamente de a^N y p.
Usando que $a^N \in [1/4, 1/2]$ y $p \in [p_0, 1 - p_0]$, de (A1) se obtiene que, para σ chico, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\delta \leq C_1 \sigma \log(1/\sigma).$$

Luego,

$$\dim_2(\mu_a^p) \geq 1 - \kappa \geq 1 - \sigma - C_1 \sigma \log(1/\sigma) \geq 1 - C_2 \sigma \log(1/\sigma) \quad (**)$$

Como $a^{1/\sigma} = a^{N-1} < a^{-1}/2 < 2/3$, $\sigma \leq \log(1/a)/\log(3/2)$. Así,

$$\sigma \leq C_4(1 - a).$$

Usando $(**)$, obtenemos

$$\dim_2(\mu_a^p) \geq 1 - C_5(1-a)\log(1/(1-a)).$$

Usando $(**)$, obtenemos

$$\dim_2(\mu_a^p) \geq 1 - C_5(1-a)\log(1/(1-a)).$$

Como vale

$$\mu_a^p = \mu_{a^2}^p * S_a \mu_{a^2}^p,$$

Usando $(**)$, obtenemos

$$\dim_2(\mu_a^p) \geq 1 - C_5(1-a)\log(1/(1-a)).$$

Como vale

$$\mu_a^p = \mu_{a^2}^p * S_a\mu_{a^2}^p,$$

por el Lema,

$$\dim_\infty(\mu_a^p) \geq 1 - C_5(1-a^2)\log(1/(1-a^2)) \geq 1 - C_6(1-a)\log(1/(1-a)). \blacksquare$$

Vale

$$\dim_2(\mu^p_{a^N}) = \frac{\log(p^2 + (1-p)^2)}{\log(a^N)}.$$

Vale

$$\dim_2(\mu^p_{a^N}) = \frac{\log(p^2 + (1-p)^2)}{\log(a^N)}.$$

Corolario

Existe una constante $C > 0$ *tal que*

$$\dim_\infty(\mu_a) \geq 1 - C(1-a)^2 \log(1/(1-a)).$$

Vale

$$\dim_2(\mu^p_{a^N}) = \frac{\log(p^2 + (1-p)^2)}{\log(a^N)}.$$

Corolario

Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\dim_\infty(\mu_a) \geq 1 - C(1-a)^2 \log(1/(1-a)).$$

Vale

$$\dim_2(\mu^p_{a^N}) = \frac{\log(p^2 + (1-p)^2)}{\log(a^N)}.$$

Corolario

Existe una constante $C > 0$ *tal que*

$$\dim_\infty(\mu_a) \geq 1 - C(1-a)^2 \log(1/(1-a)).$$

Dem. Sea $a \in (0,1)$ cerca de 1 y sea $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : a^n \leq 1/2\}$.
Así $a^N > a/2$.

Vale

$$\dim_2(\mu^p_{a^N}) = \frac{\log(p^2 + (1-p)^2)}{\log(a^N)}.$$

Corolario

Existe una constante $C > 0$ *tal que*

$$\dim_\infty(\mu_a) \geq 1 - C(1-a)^2 \log(1/(1-a)).$$

Dem. Sea $a \in (0,1)$ cerca de 1 y sea $N = \text{ínf}\{n \in \mathbb{N}: a^n \leq 1/2\}$. Así $a^N > a/2$. Luego

$$\begin{aligned}\dim_2(\mu_{a^N}) &= \frac{\log(1/2)}{\log a^N} \\ &\geq \frac{\log(1/2)}{\log(a/2)} = 1 - \frac{\log(1/a)}{\log(2/a)}.\end{aligned}$$

Como antes, si $\dim_2(\mu_a) \leq (1-a)$ entonces existe $\sigma = \sigma(\kappa, a) > 0$ con

Como antes, si $\dim_2(\mu_a) \leq (1 - a)$ entonces existe $\sigma = \sigma(\kappa, a) > 0$ con

$$\begin{aligned} \dim_2(\mu_a) &\geq \dim_2(\mu_{a^N}) + (N-1)\sigma \\ &\geq 1 - \frac{\log(1/a)}{\log(2/a))} + (N-1)\sigma. \end{aligned}$$

Como antes, si $\dim_2(\mu_a) \le (1-a)$ entonces existe $\sigma = \sigma(\kappa, a) > 0$ con

$$\begin{aligned} \dim_2(\mu_a) &\ge \dim_2(\mu_{a^N}) + (N-1)\sigma \\ &\ge 1 - \frac{\log(1/a)}{\log(2/a))} + (N-1)\sigma. \end{aligned}$$

Si κ es tal que $\sigma = \frac{\log(1/a)}{\log(2/a)} \frac{1}{N-1}$, entonces

Como antes, si $\dim_2(\mu_a) \leq (1-a)$ entonces existe $\sigma = \sigma(\kappa, a) > 0$ con

$$\begin{aligned}\dim_2(\mu_a) &\geq \dim_2(\mu_{a^N}) + (N-1)\sigma \\ &\geq 1 - \frac{\log(1/a)}{\log(2/a))} + (N-1)\sigma.\end{aligned}$$

Si κ es tal que $\sigma = \frac{\log(1/a)}{\log(2/a)} \frac{1}{N-1}$, entonces

$$\dim_2(\mu_a) \geq 1 - \kappa.$$

Como antes, si $\dim_2(\mu_a) \leq (1-a)$ entonces existe $\sigma = \sigma(\kappa, a) > 0$ con

$$\begin{aligned}\dim_2(\mu_a) &\geq \dim_2(\mu_{a^N}) + (N-1)\sigma \\ &\geq 1 - \frac{\log(1/a)}{\log(2/a))} + (N-1)\sigma.\end{aligned}$$

Si κ es tal que $\sigma = \frac{\log(1/a)}{\log(2/a)} \frac{1}{N-1}$, entonces

$$\dim_2(\mu_a) \geq 1 - \kappa.$$

Estimación de κ + Lema. ■

Futuros trabajos:

• Considerar el atractor $\mu_{\lambda,O}$ del IFS $(\lambda Ox - I, \lambda Ox + I)$ con pesos $(1/2, 1/2)$, donde $\lambda \in (0,1)$, O es una aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^d$ e I es la identidad (es decir, una generalización de las convoluciones de Bernoulli para dimensión $d > 1$).

Futuros trabajos:

• Considerar el atractor $\mu_{\lambda,O}$ del IFS $(\lambda Ox - I, \lambda Ox + I)$ con pesos $(1/2, 1/2)$, donde $\lambda \in (0,1)$, O es una aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^d$ e I es la identidad (es decir, una generalización de las convoluciones de Bernoulli para dimensión $d > 1$).

• Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, considerar el atractor $\mu_{\lambda_1,\lambda_2}$ del IFS $(\lambda_1 x, \lambda_2 x + 1)$ con pesos $(1/2, 1/2)$ (es decir, una versión no homogénea de las convoluciones de Bernoulli).

Bibliografía:

- [Erd39] P. Erdős.
On a family of symmetric Bernoulli convolutions.
Amer. J. Math., 61:974–976, 1939.

- [Erd40] P. Erdős. *On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions.*
Amer. J. Math., 62:180–186, 1940.

- [FLR02] A. Fan, K. Lau, and H. Rao. *Relationships between different dimensions of a measure.*
Monatsh. Math., 135(3):191–201, 2002.

- [Kah71] J. Kahane. *Sur la distribution de certaines séries aléatories.*
Bull. Soc. Math. France., 25:119–122, 1971.

- [Kau84] R. Kaufman. *On Bernoulli convolutions.* In Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982), vol 26 of Contemp. Math. :217–222, 1984.

- [Shm16] P. Shmerkin. *On Furstenberg's intersection conjecture, self-similar measures, and the L^q norms of convolutions.* Preprint, arXiv:1609.07802, 2016.

- [Tsu15] M. Tsujii. *On the Fourier transforms of self-similar measures.* Dyn. Syst., 30(4):468–484, 2015.

Muchas gracias!!!